DERETA

www.dereta.rs

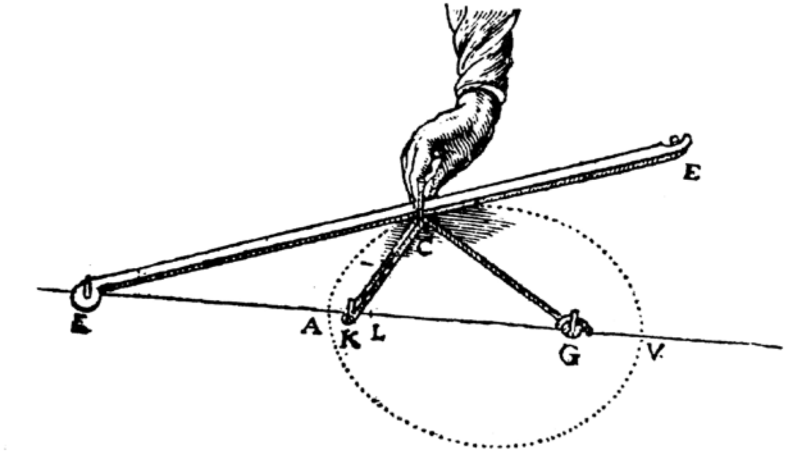
Biblioteka
FILOZOFIJA

Urednik izdanja
Aleksandar Šurbatović

Naslov originala
LA GÉOMÉTRIE
René Descartes

Rene Dekart

GEOMETRIJA



Prevod s francuskog, pogovor i komentari
dr Milan D. Tasić

Beograd
2017.
DERETA

KNJIGA I

PROBLEMI KOJI MOGU DA SE IZRAZE JEDINO PUTEM KRUGOVA I DUŽI

Kako se aritmetički račun odnosi prema geometrijskom

Sve geometrijske probleme mi prevodimo lako u takve termine da valja poznavati iznose tek nekoliko dužina (*lignes droites*[1]), pa da ovi budu postavljeni (*construites*[2]).

I kao što se čitava aritmetika sastoji samo od četiri ili pet operacija: sabiranja, oduzimanja, množenja i deljenja, kao i vađenja korena, što se pak može uzeti da je vrsta deljenja, tako i u geometriji, ako je potrebno iznaći neke duži, ne činimo mi drugo osim što dodajemo ili oduzimamo od njih izvesne druge duži. Recimo, ako imamo u vidu duž, koju bih radije nazvao jedinicom – ne bih li time uputio na brojeve – a koja, u opštem slučaju, može biti proizvoljno velika, uz dve druge date duži, pa

---

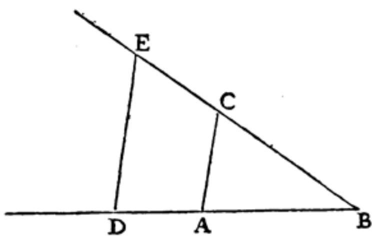
[1] Rečima „prava linija" Dekart (ovde) naziva ono što mi označavamo danas kao „duž", ili „segment".

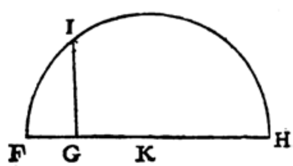
[2] Uobičajeno je za nas i da probleme „postavljamo", a da rešenja – budu li ona geometrijske prirode – „konstruišemo".

treba naći četvrtu, koja se prema jednoj od datih odnosi kao druga od njih prema jedinici, istovetno je to sa množenjem. Ili pak ako treba odrediti četvrtu duž, koja se prema jednoj od dve date odnosi kao jedinica prema drugoj duži, ne bi to bilo drugo do deljenje. I, najzad, ako je potrebno naći jednu, dve ili više srednjih proporcionala između jedinice i druge duži, poklapa se ovo s vađenjem kvadratnog, kubnog itd. korena. Nećemo se ustezati, stoga, da uvedemo aritmetičke termine u geometriju ne bismo li tako postali još jasniji.

Kako se geometrijski izvode množenje, deljenje i vađenje kvadratnog korena

Neka je, na primer, AB[3] jedinica i, ako se traži da pomnožimo BD i BC, trebalo bi samo da spojimo tačke A i C i povučemo





DE paralelno sa CA, pa da, u tom slučaju, BE bude traženi proizvod. Ako valja potom da podelimo BE sa BD, spajamo tačke E i D i povlačimo AC paralelno sa DE, kada je BC upravo rezultat deljenja[4]. Najzad, ako treba naći kvadratni koren iz GH, odvajamo

[3] Danas, takođe, s $\overline{AB}$ označavamo duž čiji je početak u tački A, a kraj u tački B, dok su uobičajene oznake za prave mala pisana slova latinice *p*, *q* i sl. Ipak, Dekartov način obeležavanja nećemo menjati zato što je dovoljno jasan.

[4] Ako, po pravilu, i Dekart koristi a^3, a^4 itd., radije piše *aa* umesto a^2 i sl.

na istoj pravoj jedinicu FG, pa podelivši FH tačkom K, opisujemo krug FIH oko K, kao središta. Tada bi normala iz tačke G do preseka bio traženi koren. Ne iznosimo ovde ništa o kubnom ili drugim korenima jer ćemo podrobnije govoriti o tome nešto kasnije.

O korišćenju simbola u geometriji

Ali često i ne moramo da povlačimo duži na hartiji, već je dovoljno da svaka od njih bude označena izvesnim slovom. Tako, da bismo sabrali duži BD i GH, označavamo prvu sa a, a drugu sa b i pišemo $a + b$. Tada bi $a - b$ značilo da je b oduzeto od a, ab da je jedno pomnoženo s drugim, a $\frac{a}{b}$ da je a podeljeno sa b; aa ili a^2 pak da je a pomnoženo samo sa sobom, a^3 da je ovaj proizvod po-množen još jednom sa a i tako dalje, unedogled. Ili pišemo $\sqrt{a^2 + b^2}$ umesto kvadratnog korena iz $a^2 + b^2$, $\sqrt[3]{a^3 - b^3 + ab^2}$ umesto kubnog korena iz $a^3 - b^3 + ab^2$ i slično za druge korene[5].

Valja ovde primetiti da obično sa a^2, b^3 i slično označavamo tek proste duži, koje inače nazivamo kvadratima, kubovima i sl. – upotrebivši izraze koji se koriste u algebri – kao što i svi delovi duži moraju uvek da budu istih dimenzija onda kada jedinica nije određena uslovima problema. Tako bi a^3 imalo onoliko dimenzija koliko ab^2 ili b^3, što su inače delovi duži koju sam označio sa $\sqrt[3]{a^3 - b^3 + ab^2}$. No, nije to isto kao i kad bi jedinica bila određena, jer ova uvek može da se podrazumeva onda kad

[5] Dekartova oznaka je $\sqrt{C \cdot a^3 - b^3 + abb}$, koja se, ipak, nije ustalila u nauci algebre.

imamo previše ili premalo dimenzija; recimo, ako se traži da se izvuče kubni koren iz $a^2b^2 - b,$ uzima se da je veličina a^2b^2 podeljena jedanput jedinicom, a veličina b pomnožena dva puta njome[6]. Inače, da ne bismo prevideli oznake ovih duži, trebalo bi sačiniti izvestan njihov spisak, onako kako se one dodeljuju, ili pak menjaju. Na primer AB = 1, to jest AB je jednako 1[7], GH = a, BD = b i tako dalje.

Potrebno je doći do jednačina prilikom rešavanja problema

Ako želimo da rešimo neki problem, valja, najpre, da uzmemo kao da smo mu našli rešenje[8], označivši veličine koje se čine da su neophodne, kako nepoznate, tako i poznate. U tom slučaju, ne razlikujući nepoznate od poznatih duži, razdvajamo poteškoću, na način koji prirodno pokazuje njihov uzajaman odnos, sve dok ne nađemo da je moguće izraziti istu veličinu putem dva izraza. A to ja nazivam jednačinom, pošto su članovi svakog od tih izraza jednaki članovima drugih izraza.

No, moramo naći onoliko jednačina koliko se i pretpostavlja da ima nepoznatih[9], ali ako budu razmotreni uslovi problema, a ne

---

[6] To jest svaki član algebarskog zbira mora biti istog stepena – ovde trećeg.

[7] Dekart ovde koristi $\propto$ kao znak jednakosti (prvi vokali od reči *aequare*, u značenju „biti jednak"), koji se, takođe, nije održao.

[8] Postupak koji pripada Platonu, a koristio ga je Pap (*Pappus*) – matematičar iz Aleksandrije, koji je živeo oko 300. godine nove ere i napisao delo od osam knjiga (vidi Pogovor).

[9] Slučaj, po Van Shotenu (Van Schooten), ilustruje sledeći primer. Valjalo bi produžiti datu duž AB do tačke D, tako da proizvod AD i DB bude jednak kvadratu CD, pri čemu je C tačka na AB. Ako je AC = a, CB = b, a BD = x, dve strane jednačine do koje se prispeva bile bi: $ax + bx + x^2 = x^2 + 2bx + b^2$, odakle se dobija $x = b^2 / (a - b)$.

bude ih toliko nađeno, jasno je da problem nije u potpunosti određen. U tom slučaju, možemo proizvoljno da uzmemo poznate duži, za svaku nepoznatu, kojoj ne odgovara nikakva jednačina.

Potom, ako postoji više jednačina, posmatramo redom svaku pojedinačno, uzimajući je kao samu, ili pak poredeći je sa ostalim, ne bismo li odredili svaku od nepoznatih i nastavljamo sve dok ne ostane jedna jedina od njih, jednaka izvesnoj poznatoj duži. Ili pak takva da su njen kvadrat, kub, četvrti, peti itd. stepen jednaki nečemu što je suma, ili razlika dve ili više veličina, od kojih je jedna poznata, dok su druge srednje proporcionale između jedinice i tog kvadrata, kuba, četvrtog stepena itd., pomnožene drugim poznatim veličinama. A to zapisujemo ovako:

$$z = b,$$

$$\text{ili } z^2 = -\,az + b^2,$$

$$\text{ili } z^3 = az^2 + b^2z - c^2,$$

$$\text{ili } z^4 = az^3 - c^3z + d^4 \text{ itd.}$$

To jest *z* koje uzimamo za nepoznatu veličinu jednako je *b,* ili kvadrat *z* jednak je kvadratu *b,* umanjenom za *a* pomnoženo sa *z;* ili kub broja *z* jednak je *a* pomnoženo kvadratom *z*, uvećano za kvadrat *b* pomnoženo sa *z* i potom umanjeno za kub *c*; a slično i sa drugim stepenima.

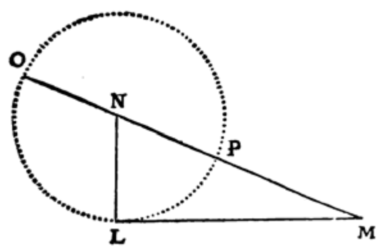
Tako je uvek moguće nepoznate veličine svesti na jednu jedinu, pošto problem može da se izrazi putem krugova i duži, konusnih preseka ili pak pomoću druge krive (*ligne*), stepena ne većeg od tri ili četiri.

Ali ovde i ne pokušavamo da to podrobnije objasnimo jer bismo vas lišili zadovoljstva da njime sami ovladate, kao i koristi po razvoj duha koja se time dobija, što je, po našem mišljenju, ono najvažnije što se može steći od ove nauke. Kao što i ne vidimo da je išta u toj meri teško da ga ne bi mogli rešiti oni koji su tek jedva upućeni u opštu geometriju i algebru, budu li samo uvažili sve što je u ovoj raspravi izneseno.

Ako neko ko bude rešavao jednačine uradi sve moguće analize bez izuzetka, biću zadovoljan jer će doći do najjednostavnijeg izraza na koji problem može da se svede.

O problemima ravni i kako se oni rešavaju

A ako ovaj problem može biti rešen u opštoj geometriji, to jest korišćenjem samo duži i krugova u ravni, kada bi inače poslednja jednačina bila u celosti rešena, ostao bi najviše samo kvadrat jedne nepoznate, jednak proizvodu njenog korena i neke poznate veličine, uvećanom ili umanjenom za neku drugu, takođe poznatu veličinu, tada se koren, ili nepoznata duž, mogu jednostavno naći.



Uzmimo, recimo, da je $z^2 = az + b^2$, konstruišimo pravi ugao NLM, čija je jedna strana LM jednaka *b*, kao kvadratnom korenu poznate veličine b^2, dok je druga, LN, jednaka $\frac{1}{2}a$, to jest polovini druge poznate veličine pomnožene sa *z*, za koju smo pretpostavili da je nepoznata. Ako onda produžimo MN, hipotenuzu (*base*) ovog trougla, do tačke O, pri čemu je NO jednako NL, OM bi upravo bila tražena duž *z*. Izražavamo to na sledeći način:

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}.$$[10]

Ukoliko imamo $y^2 = -ay + b^2$, gde je y veličina čiji se kvadrat traži, konstruišimo ponovo pravougli trougao NLM, pa na hipotenuzi MN odvojmo NP jednako NL, kada bi ostatak PM bio upravo *y* ili traženi koren. U tom smislu da je

$$y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}.$$

Isto tako, uzmemo li da je

$$x^4 = -ax^2 + b^2,$$

PM bi bilo x^2, odnosno

$$x = \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}},$$

a isto tako i u drugim slučajevima.

Najzad, bude li $z^2 = az - b^2$, povlačimo, kao i pre, NL jednako $\frac{1}{2}a$ i LM jednako *b*, a potom, umesto da spojimo tačke M i N, povlačimo liniju MQR, paralelno sa LN, dok iz N, kao središta,

---

[10] Uzimamo da je LN = *a*, OM = *z* i pošto je LM² = OM·PM, bilo bi $b^2 = z(z - a)$, dok je MN = $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$. Odatle se dobija navedena vrednost za *z*, budući da je *z* = OM = ON + MN. Dekart ne „uvažava” koren oblika $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ jer je ovaj negativan.

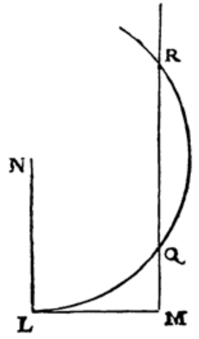
opisujemo krug kroz tačku L, koji MQR seče u tačkama Q i R. Tada bi traženo z bilo MQ ili MR jer se u tom slučaju može izraziti na dva načina, naime[11]:

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$$

i

$$z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}.$$

Ako pak krug opisan oko N prolazi kroz tačku L, a niti seče niti dodiruje duž MQR, jednačina neće imati nikakvih korena, pa možemo reći da se dati problem ne može postaviti.



Ti se isti koreni inače mogu naći i na mnogo drugih načina, dok smo mi izneli samo one krajnje jednostavne ne bismo li pokazali da je moguće postaviti sve probleme opšte geometrije tek putem nečeg malog, sadržanog u četiri slike koje sam opisao[12].

[11] Polazi se od MR·MQ = LM^2, što dovodi do relacije $z^2 = az - b^2$, onda kada je MR = z. Bude li MQ = z i tačka O na sredini QR, tada MQ = OM − OQ i MR = MO + OR dovode do traženih vrednosti (kao obe pozitivne).

[12] Dekart ne razmatra tip jednačine $z^2 + az + b^2 = 0$ pošto ne sadrži pozitivne korene.

S A D R Ž A J

KNJIGA I

PROBLEMI KOJI MOGU DA SE IZRAZE JEDINO PUTEM KRUGOVA I DUŽI

Kako se aritmetički račun odnosi prema geometrijskom 5
Kako se geometrijski izvode množenje, deljenje i vađenje kvadratnog korena 6
O korišćenju simbola u geometriji 7
Potrebno je doći do jednačina prilikom rešavanja problema 8
O problemima ravni i kako se oni rešavaju 10
Papov problem 13
Rešenje Papovog problema 17
Kako valja odabrati oznake (*termes)* da bismo došli do jednačina u tom slučaju 19
Kako zaključujemo da je problem u vezi sa ravnima kad nije dato više od pet pravih 22

KNJIGA II

O PRIRODI KRIVIH LINIJA

Koje su krive dopustive u geometriji 25

Način podele svih krivih linija na klase, kao i nalaženje odnosa njihovih tačaka ka tačkama pravih linija 28

Nastavak rešenja Papovog problema, postavljenog u prethodnoj knjizi 32

Rešenje ovog problema u slučaju tri ili četiri linije 33

Dokaz tog rešenja 41

O mestima tačaka prostora i ravni, kao i o načinu njihovog nalaženja 44

Koja prva i najprostija kriva služi kao rešenje problema drevnih naučnika onda kada se on odnosi na pet pravih 45

Krive koje mogu da se opišu nalaženjem više njihovih tačaka 48

Krive koje je moguće opisati putem kanapa 49

Da bismo odredili svojstva krivih, dovoljno je poznavati odnos njihovih tačaka sa tačkama pravih; metod povlačenja linija koje ih seku u proizvoljnoj tački pod pravim uglom 49

Opšti postupak nalaženja pravih koje seku date krive pod pravim uglom 50

Primer u slučaju elipse i parabole druge klase 51

Drugi primer u slučaju ovala druge klase 53

Primer rešavanja problema u slučaju konhoide 60

Objašnjenje četiri nove klase ovala korišćenih u optici 61

Svojstva ovala koja se odnose na odbijanje i prelamanje svetlosti . . . 65

Dokazi ovih svojstava 67
Kako se može načiniti sočivo konkavno i konveksno na jednoj strani, ukoliko se to želi, koje u datoj tački sabira sve zrake koji dolaze iz druge date tačke 70
Kako se može načiniti sočivo koje se ponaša kao prethodno i takvo da konveksnost jedne od njegovih strana bude u datom odnosu ka konveksnosti ili konkavnosti druge strane 73
Kako se može primeniti ono što je ovde kazano o krivima u ravni na krive opisane u prostoru od tri dimenzije ili na krivoj površini 75

KNJIGA III

O REŠAVANJU PROSTORNIH I SUPERPROSTORNIH PROBLEMA

Koje krive bi mogle da posluže pri rešavanju bilo kog problema ... 77
Primer koji se odnosi na nalaženje više srednjih proporcionala .. 78
O prirodi jednačina 79
Koliko korena ima svaka jednačina 79
Koji su koreni lažni 80
Kako se može smanjiti stepen jednačine kada je poznat jedan njen koren 80
Kako odrediti da li data vrednost predstavlja koren 80
Koliko istinitih korena može imati jednačina 81
Kako lažni koreni mogu postati istiniti, a istiniti lažni 81
Kako umanjiti ili uvećati koren jednačine 82
Uvećavanjem istinitih korena smanjuju se lažni i obratno 83
Kako eliminisati drugi član jednačine 84

Šta učiniti da istiniti koreni budu lažni, a lažni isiniti 85
Kako popuniti sva mesta u jednačini 86
Množenje ili deljenje korena jednačine 87
Kako ukloniti razlomke u jednačini 87
Šta učiniti da poznata veličina nekog člana jednačine bude jednaka datoj veličini 88
Istiniti i lažni koreni mogu biti i realni i imaginarni 88
Svođenje kubnih jednačina kada se radi o problemu ravni 89
Način deljenja jednačine binomom koji sadrži njen koren 90
Koji su problemi prostorni kada je jednačina koja ih izražava kubna 91
Svođenje jednačina četvrtog stepena u slučaju problema ravni ... 91
Primer korišćenja ovih svođenja 96
Opšte pravilo svođenja jednačina stepena većeg od četiri 98
Opšti način rešavanja prostornih problema koji se svode na jednačinu trećeg ili četvrtog stepena 98
Nalaženje dve srednje proporcionale 104
Podela ugla na tri dela 105
Svi se prostorni problemi mogu svesti na te dve konstrukcije 106
Način izražavanja vrednosti korena kubnih jednačina... 109
... a potom i svih jednačina stepena ne većeg od četiri 110
Zašto se prostorni problemi ne mogu rešiti bez konusnih preseka, niti složeniji problemi bez drugih takođe složenih linija 110
Opšti način konstrukcije problema koji nalažu jednačinu najviše šestog stepena 112
Nalaženje četiri srednje proporcionale 120

Pogovor (M. D. Tasić) 125

Rene Dekart
GEOMETRIJA

Za izdavača
Dijana Dereta

Izvršni urednik
Anja Marković

Lektura
Aleksandra Šašović

Korektura
Dijana Stojanović

Likovno-grafička oprema
Marina Slavković

Prvo DERETINO izdanje

ISBN 978-86-6457-139-5

Tiraž
1000 primeraka

Beograd 2017.

Izdavač / Štampa / Plasman
DERETA doo
Vladimira Rolovića 94a, 11030 Beograd
tel./faks: 011/ 23 99 077; 23 99 078

www.dereta.rs

Knjižara DERETA
Knez Mihailova 46, tel.: 011/ 26 27 934, 30 33 503

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

514

ДЕКАРТ, Рене, 1596–1650

Geometrija / Dekart ; prevod s francuskog, pogovor i komentari Milan D. Tasić. – 1. Deretino izd. – Beograd : Dereta, 2017 (Beograd : Dereta). – 135 str. : ilustr. ; 21 cm. – (Biblioteka Filozofija / [Dereta])

Prevedeno prema: La géométrie / René Descartes. – Tiraž 1.000. – Pogovor: str. 125–135. – Napomene uz tekst.

ISBN 978-86-6457-139-5

а) Геометрија
COBISS.SR-ID 240131340